Решение задачи теплопроводности

Общие принципы

При решении задачи теплопроводности неизвестной является температура в узлах расчетной схемы (аналогично перемещениям в прочностной задаче). Тогда Уравнение равновесия выглядит:



Матрица теплопроводности формируется из коэффициентов теплопроводности K, что задаются в жесткости конечного элемента. В случае пластин, матрица теплопроводности умножается на толщину элемента H.

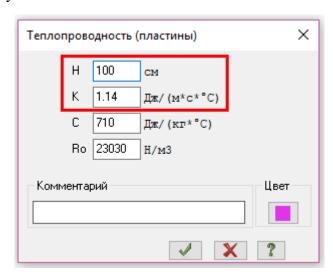


Рис. 1. Свойства теплопроводности

При решении нестационарной задачи теплопроводности в уравнение равновесия включается матрица теплопоглощения (демпфирования) С:

$$KT + C\frac{\partial}{\partial t}T = P$$

Матрица демпфирования зависит от произведения коэффициента демпфирования C на плотность материала R_O (и умноженных на толщину элемента H, если это пластина).

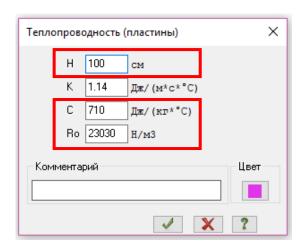
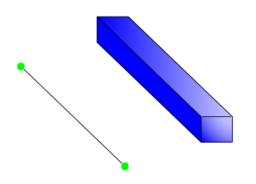


Рис. 2. Свойства теплопроводности

Типы конечных элементов

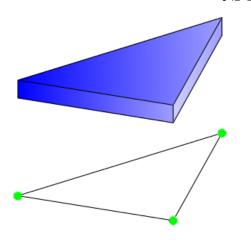
КЭ теплопроводности

№ 1505



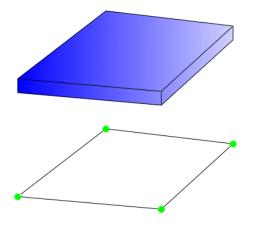
Стержневой КЭ теплопроводности

№ 1508



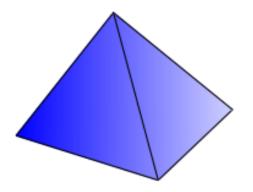
Треугольный КЭ теплопроводности

№ 1509



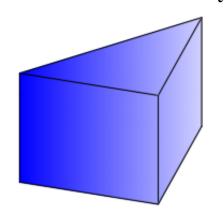
Четырехугольный КЭ теплопроводности

№ 1512



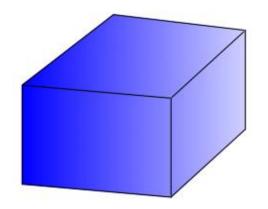
КЭ теплопроводности в форме тетраэдра

№ 1514



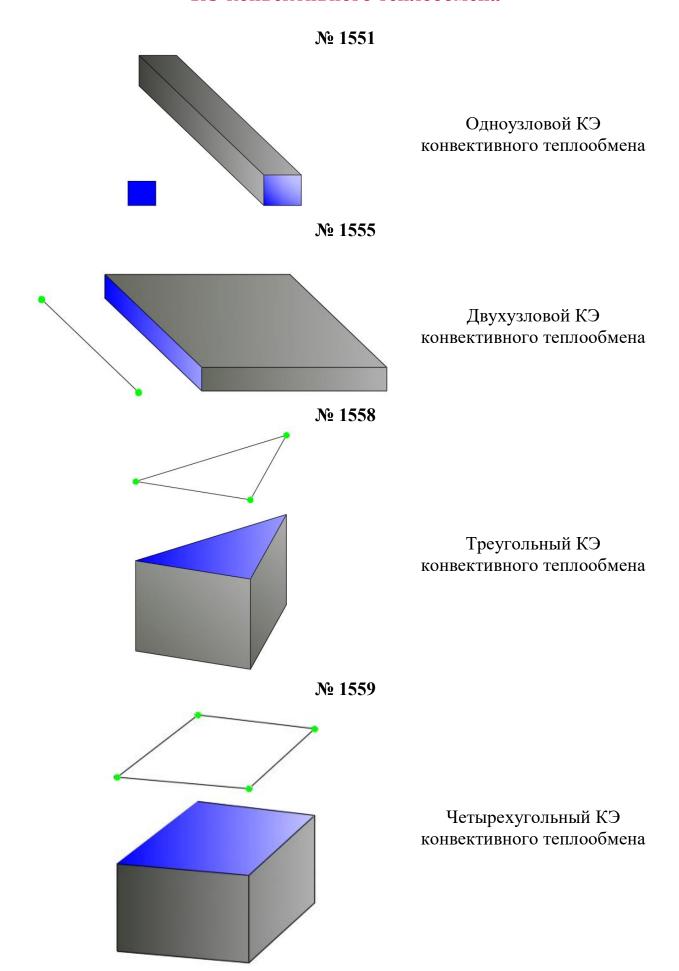
Объемный шестиузловой КЭ теплопроводности

№ 1516



Объемный восьмиузловой КЭ теплопроводности

КЭ конвективного теплообмена



Виды нагрузок

Стационарные виды нагрузок

1. Постоянная температура в узле

(или граничное условие первого рода)

Когда задана температура одного из узлов:

$$T_i = T$$
, °C

Аналогом в прочностной задаче есть заданное перемещение узла.

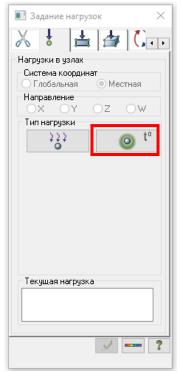


Рис. 3. Нагрузка на узел

2. Тепловой поток (или граничное условие второго рода)

Когда внешняя нагрузка Р равна:

$$P = q$$

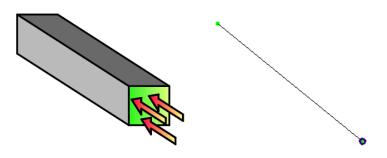
По определению **тепловой поток** — это количество теплоты, которое проходит через изотермическую поверхность (условную поверхность с одинаковой температурой) за единицу времени.

Измеряется в
$$\frac{\mathcal{L}_{m}}{C \cdot M^{2}}$$
 (или $\frac{BT}{M^{2}}$, поскольку 1 $BT = 1$ $\frac{\mathcal{L}_{m}}{C}$).

В ЛИРЕ-САПР есть возможность задавать тепловой поток на узел, пластину или объемное тело.

2.1. Тепловой поток на узел

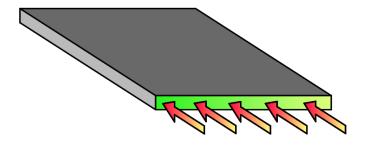
При задании теплового потока ну узел необходимо вычислить площадь, через которую проходит поток (в случае рассмотрения балки, это будет площадь сечения). К примеру, если величина теплового потока $q=100 \, \frac{\mbox{$\frac{\mbox{$\mbox{$\mu$}}{\mbox{$\mbox{κ}}}}{\mbox{$\mbox{$\mbox{c}$}\cdot\mbox{$\mbox{M}}^2}}$, а площадь через которую проходит поток равна 0,1 м², то величина задаваемой нагрузки на узел P равна $100*0,1=10 \, \frac{\mbox{$\frac{\mbox{$\mbox{$\mbox{$\mu$}}}{\mbox{$\mbox{κ}}}}}{\mbox{$\mbox{$\kappa$}}}$.



Тепловой поток на узел

2.2. Тепловой поток на ребро пластины

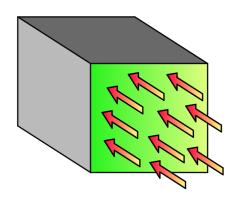
При задании теплового потока на ребро необходимо чистую величину теплового потока умножать на толщину пластины. Например, если величина теплового потока $q=100\frac{\mbox{$\frac{\Pi \mbox{\times}}{\mbox{\times}}}{\mbox{$c\cdot \mbox{$M2}}$, а толщина пластины равна 0,1 м, то величина задаваемой нагрузки на узел P равна $100*0,1=10\frac{\mbox{$\frac{\Pi \mbox{\times}}{\mbox{\circ}}}}{\mbox{$c\cdot \mbox{$\times$}}}$.



Тепловой поток на ребро

2.2. Тепловой поток на объемное тело

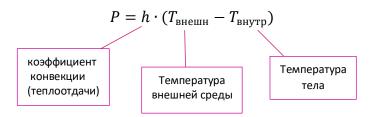
В случае задания теплового потока на грань объемного тела: не нужно умножать, ни на площадь, ни на длину ©. Необходимо только указать номер грани, на которую воздействует поток и величину самого потока $q=100\,\frac{\mbox{\sc d}_{\mbox{\sc k}}}{\mbox{\sc c}\cdot\mbox{\sc M}^2}$.



Тепловой поток на грань

3. Конвективный теплообмен (или граничное условие третьего рода)

Когда внешняя нагрузка Р равна:



Конвективный теплообмен — это процесс потери тепла телом за счет того, что при движении воздуха происходит соприкосновение отдельных частиц, у которых различная температура. При конвективном теплообмене происходит теплоотдача между поверхностью тела и движущейся средой (например, воздухом).

Создание конвективной нагрузки на схему совершается в 2 этапа:

На первом этапе нужно создать конечный элемент конвекции в месте контакт схемы с воздухом.

Для стержня – контакт моделируется через одноузловой КЭ конвекции (КЭ №1551). Для пластины – контакт моделируется через двухузловой КЭ конвекции (КЭ №1555). Для объемного тела – через пластинчатые КЭ конвекции (КЭ №1558 и №1559).

В жесткости такого конечного элемента нужно указать коэффициент конвективной теплоотдачи и площадь контакта (для одноузлового КЭ) или высоту контактной поверхности (для 2х-узлового КЭ). Коэффициент конвективной теплоотдачи h измеряется в $\frac{\mathcal{L}_{\text{ж}}}{c \cdot \text{m}^2 \cdot {}^{\circ}\text{C}}$.

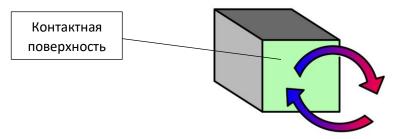


Рис. 4. Конвективный теплообмен

На втором этапе нужно приложить нагрузку на контактный элемент. Через задание нагрузки формируется внешняя температура воздуха.

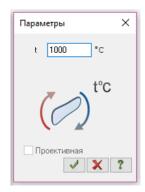


Рис. 5. Внешняя температура

Пример задания конвективной нагрузки смотрите в «Примере решение стационарной задачи теплопроводности» и «Примере решение динамической теплопроводности для залачи огнестойкости».

Нестационарные виды нагрузок

Из всех видов нестационарных нагрузок: непосредственно на узел (элемент) можно задать только изменяемый во времени тепловой поток на узел. Все остальные виды нестационарных нагрузок можно задать, только используя диалоговое окно «Формирование динамических загружений из статических».

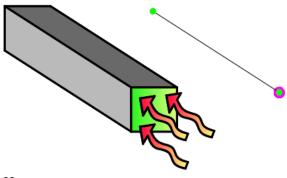
1. Изменяемый во времени Тепловой поток

1.1. На узел

Есть три вида изменяемой во времени нагрузки на узел (аналогично прочностной задаче):

- ломанная с произвольным шагом;
- синусоидальная;
- ломанная с равномерным шагом.

Величина задаваемой нагрузки определяется аналогично стационарному тепловому потоку, то есть значение чистого теплового потока умножается на площадь, через которую проходит этот поток.



Нестационарный тепловой поток на узел

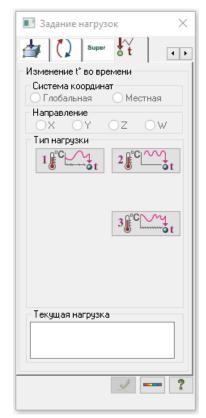


Рис. 6. Нестационарная нагрузка

1.2. На ребро пластины или на грань объемного КЭ

Чтобы задать *нестационарный* тепловой поток на ребро пластины или на грань объемного КЭ нужно задать *стационарный тепловой поток* в любом Загружении, кроме Загружения 4. Поскольку, Загружение 4 предназначено для задания демпфирующих нагрузок.

После этого, в окне «Динамика во времени из статических загружений» нужно сформировать Нестационарное загружение из соответствующего стационарного, путем задания закона изменения нагрузки во времени.

Для формирования теплового потока можно использовать следующие законы преобразования:

- ломанный с произвольным шагом (1);
- синусоидальный (2);
- ломанный с равномерным шагом (4).

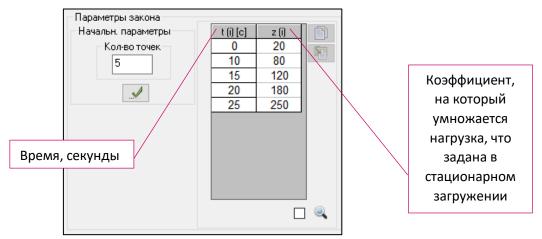


Рис. 7. Формирование теплового потока

2. Изменяемый во времени Конвективный теплообмен.

Использовать такой тип нагрузки можно, если температура движущейся среды (к примеру, воздуха) может значительно изменяться во времени.

Как было сказано выше, задание нестационарного конвективного теплообмена происходит так же, как и задание теплового потока на ребро или на грань (то есть, через формирование динамических нагрузок из статических).

3. Изменяемый во времени Лучистый теплообмен

(или радиационный теплообмен)

Когда внешняя нагрузка Р равна:

$$P = \Phi \varepsilon_m \varepsilon_f \sigma (T_{\text{вешн}}^4 - T_{\text{внутр}}^4)$$

Ф – угловой коэффициент

 ε_m – коэффициент поглощения (степень черноты поверхности конструкции)

 ε_f – коэффициент излучения (степень излучения источника)

 σ – постоянная Стефана Больцмана (равна 5,67 · $10^{-8} \frac{{\rm Br}}{{\rm m}^2 \cdot {\rm K}^4}$)

Лучистый теплообмен происходит за счет того, что часть *тепловой (внутренней)* э*нергии* тела (которая существует благодаря механическому колебанию элементарных частиц, из которых состоит тело) превращается в энергию излучения. Энергия излучения - это энергия

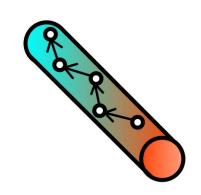
электромагнитных колебаний с волнами различной длины. Возникают электромагнитные волны за счет колебания заряженных частиц (электронов или ионов), которые входят в состав тела. При попадании лучистой энергии на какое-либо тело, часть этой энергии поглощается, часть — проходит сквозь тело, а часть - отражается. Степень поглощения телом лучевой энергии учитывается через коэффициент ε_m . К примеру, для бетона этот коэффициент равен 0,75, а для абсолютно чёрного Тела — 1.

Угловой коэффициент Ф обычно принимается равным 1, он учитывает расположение источника излучения по отношению к поглотителю.

Пример задания лучистой нагрузки смотрите в «Примере решение динамической теплопроводности для задачи огнестойкости».

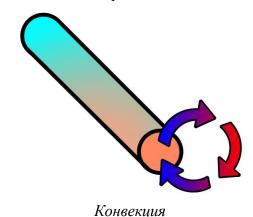
Можно подвести итоги. **Тепло** - это энергия, которая возникает за счет движения частиц, из которых состоит тело (атомов или молекул). Всего существует три основных вида передачи тепла: теплопроводность, конвекция и лучистый теплообмен.

1. Теплопроводность — когда тело проводит тепло путём хаотического движения частиц, от более нагретой части тела к менее нагретой.



Теплопроводность

2. Конвекция — вид теплообмена, который происходит за счет движения текучей среды (жидкости или газа) в окружении тела.



3. Лучистый теплообмен – когда тепло передается через электромагнитные волны.



Лучистый теплообмен

Пример решение стационарной задачи теплопроводности

Рассмотрим пример расчёта теплопроводности внешней стены кирпичного дома.

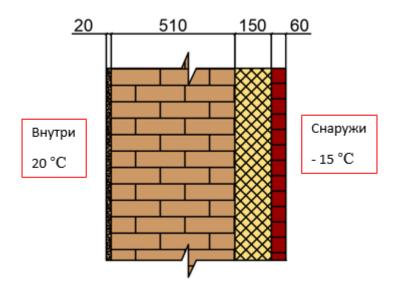


Рис. 8. Сечение стены

Создаем задачу в 15м признаке схемы, который существует специально для решения задач теплопроводности. Рассмотрим участок стены, длиной 1 метр.

ШАГ 1. ГЕОМЕТРИЯ

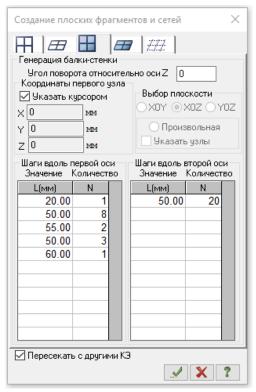


Рис. 9. Формирование геометрии

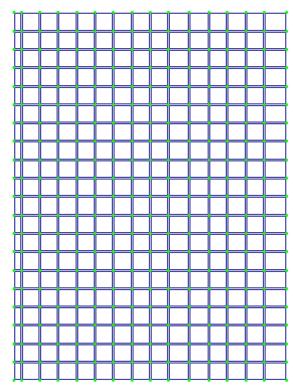


Рис. 10. КЭ модель

ШАГ 2. Создание элементов КОНВЕКЦИИ

Чтобы задать температуру воздуха, добавляем стержневые элементы на внутренней и внешней поверхности стены, и меняем их тип на КЭ №1555.

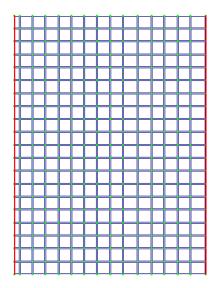


Рис. 11. КЭ модель с элементами конвекции

ШАГ 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Зададим соответствующие коэффициенты теплопроводности K для слоёв стены. Значения коэффициента теплопоглощения C и удельного веса R_0 в статическом расчете не учитываются, поэтому можно их задать равными единицам.

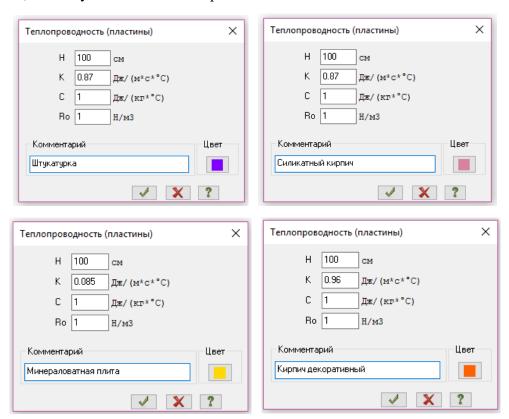
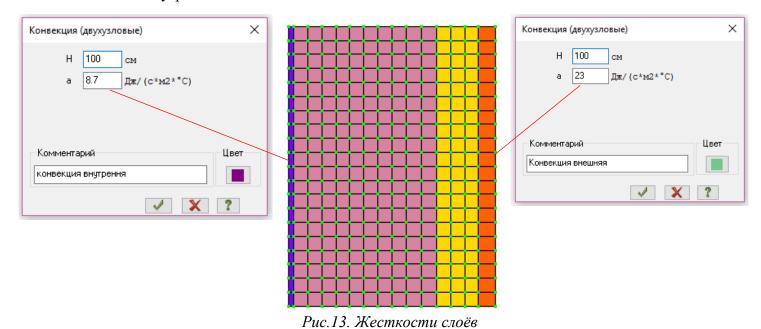


Рис. 12. Свойства теплопроводности соответствующих слоев стены

Для элементов конвекции тоже создаём жесткость, и задаем там коэффициенты конвекции внутреннего и внешнего слоя:



ШАГ 4. ВНЕШНЯЯ НАГРУЗКА

Через внешнюю нагрузку мы задаем температуру воздуха для элементов конвекции. Для этого, в разделе **Нагрузки** открываем конвективный теплообмен и задаём температуру внутри и снаружи стены.

стены

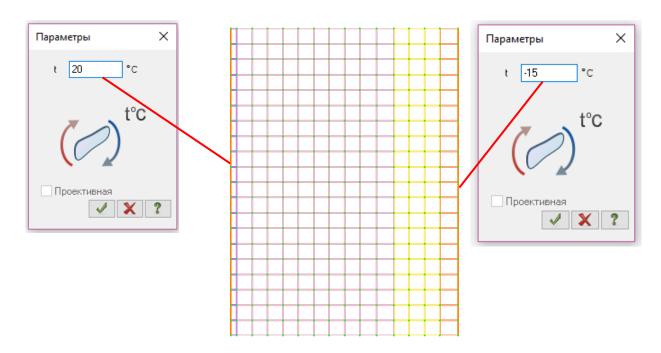


Рис.14. Задание температуры воздуха

ШАГ 5. ПРОСМОТР РЕЗУЛЬТАТОВ

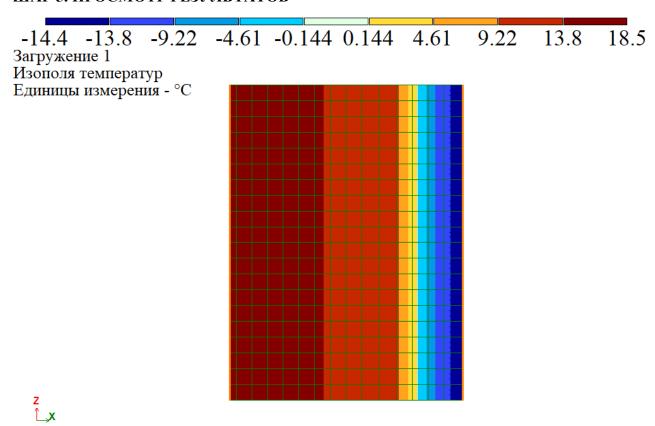


Рис.15. Просмотр результатов

Пример решение динамической теплопроводности для задачи огнестойкости

Решение задачи теплопроводности есть важным этапом при определении огнестойкости конструкции.

B Eurocode EN 1992-1-2 (2004) (пункт 4.3.1 (3)) написано «Advanced calculation methods should include calculation models for the determination of: the development and distribution of the temperature within structural members (thermal response model)...»;

В СТО 36554501-006-2006 «Правила по обеспечению огнестойкости и огнесохранности железобетонных конструкций» (пункт 4.13) сказано: «Расчет огнестойкости и огнесохранности рекомендуется производить по приведенному сечению, когда сечение элемента разбивается на малые характерные участки, нагретые до различных температур, и каждый малый участок приводится к ненагретому бетону с учетом соответствующих понижающих характеристик прочности бетона.», и в пункте 5.3. добавлено: «Температуру бетона определяют теплотехническим расчетом ...».

В ДТСУ-Н EN 1991-1-1:2010 (пункт 4.3.1) сказано: «Уточнені методи розрахунку включають розрахункові моделі для визначення наступного: зростання та розподілення температури по всіх елементах конструкції (теплотехнічний розрахунок);...».

Поэтому можно смело сказать, что без теплопроводности никуда ☺.

Рассмотрим теперь пример того, как определить распространение тепла от пожара по сечению балки, размерами 160х320 мм. Поскольку наша балка не переменного сечения, то можно рассматривать плоскую задачу, где ширина всех элементов будет равна одному погонному метру балки (100 см).

ШАГ 1. ГЕОМЕТРИЯ

Создаем схему сечения балки в 15м признаке схемы (рис. 17).

Назначим жесткость для элементов теплопроводности:

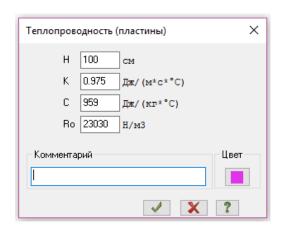


Рис. 16. Свойства теплопроводности

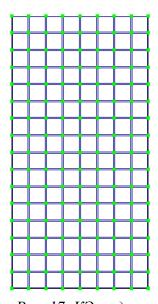


Рис. 17. КЭ модель

Как были определены теплопроводность и теплоёмкость материалов?

В СТО 36554501-006-2006 «Правила по обеспечению огнестойкости и огнесохранности железобетонных конструкций» (пункт 6.3) для теплотехнического расчета рекомендуют принимать теплопроводность и теплоёмкость бетона по формулам (рассмотрим пример тяжелого бетона на карбонатном заполнителе):

- теплопроводность: $\lambda = 1.14 0.00055t, \left[\frac{\Delta m}{c \cdot m \cdot °C} \right];$
- коэффициент теплоёмкости: $C = 0.71 + 0.00083t, \left[\frac{\kappa Дж}{\kappa r \cdot ^{\circ} C} \right];$

где t – это температура, °C.

Примечание. В нормах в формуле определения коэффициента теплоёмкости написан знак «минус», но это является опечаткой потому, что при увеличении температуры растет теплоёмкость системы. Это объясняется квантовой теорией теплоёмкости Эйнштейна.

Поскольку теплопроводность и теплоёмкость зависят от температуры, то для нашей задачи мы используем свойства бетона, что рассчитаны для температуры 300 °С. Именно с такими характеристиками бетона получаются максимально схожие результаты температурных кривых прогрева сечения с теми, что приведены в нормах.

$$\lambda = 1,14 - 0,00055 \cdot 300 = 0,975 \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{с·м·°C}} \right]$$

$$C = 0,71 + 0,00083 \cdot 300 = 0,959 \quad \left[\frac{\text{кДж}}{\text{кг·°C}} \right] = 959 \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг·°C}} \right]$$

ШАГ 2. Внешняя нагрузка. ПРЕДЫСТОРИЯ

После этого начинаем задавать граничные условия (внешнюю нагрузку). В **Загружении 1** выделяем все узлы схемы, и задаем им постоянную температуру, которая равна 20 °C. Это стандартное значение для предыстории, поскольку считается, что средняя температура конструкции до начала пожара является именно таковой. После этого все узлы окрашиваются в зеленый цвет, рис.17.

ШАГ 3. Внешняя нагрузка. КОНВЕКЦИЯ

Как было уже сказано, существует 3 основных вида передачи тепла. Саму теплопроводность внутри тела мы уже учли путем задания жесткости. Остается конвекция и лучистый теплообмен.

Поэтому, для формирования конвективного теплообмена, мы создадим контактные двухузловые конечные элементы с тех сторон балки, которые предположительно будут подвержены воздействию огня: слева, снизу и справа (Рис. 19, б). Создаем «жесткость» для элементов конвекции, и задаем там толщину нашего сечения H = 100см, а также коэффициент конвекции a=25~Дж/(м2*c*°C). Коэффициент конвекции, равный 25~— это нормативная величина для стандартного графика развития пожара.

После этого, необходимо сформировать внешнюю температуру среды. Для этого используем вид нагрузки под названием заданная температура t:



Нагрузку на конвективные элементы формируем в **Загружении 5**, при этом Загружения 2-4 оставляем свободными.

В окне задания температуры (рис. 18) записываем единицу. Чуть позже, на стадии формирования Динамической нагрузки из статической, мы будем задавать график изменения температуры при пожаре. Величины температур из этого графика будут автоматически умножаться на число, которое мы введем в этом окне. Поскольку, числа из графика нам изменять не нужно, то в окне заданной температуры мы просто записываем единицу.

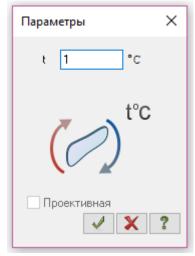


Рис. 18. Нагрузка на элементы конвекции

После задания конвективной нагрузки, контактные элементы окрашиваются в оранжевый цвет (Рис. 19, в).

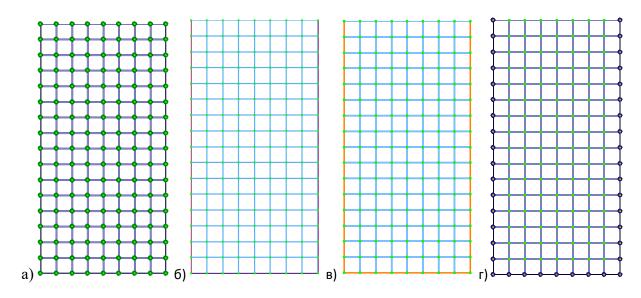


Рис.19. Этапы задания нагрузки на расчетную схему

ШАГ 4. Внешняя нагрузка. ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН (или РАДИАЦИЯ)

Как было сказано раньше, тепловое излучение — это вид теплообмена, который совершается путем поглощения электромагнитных волн. Если в случае конвективной нагрузки, площадь контакта с поверхностью мы задаем через жесткость конвективного элемента (мы задавали H=100 см), то в случае лучистого теплообмена, площадь контактной поверхности нужно задавать через нагрузку вида *Тепловой поток на узел* или *на ребро пластины*, (в случае объемного конечного элемента, тепловой поток нужно задавать на грань элемента). При расчете, на каждом шаге интегрирования, это число будет умножаться на произведение: $\Phi \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_f \cdot \sigma \cdot \left(T_{\text{вешн}}^4 - T_{\text{внутр}}^4\right)$, где $T_{\text{вешн}}$ — температура из графика пожара, который будет задаваться на следующем шаге, а $T_{\text{внутр}}$ — температура в узле расчетной схемы.

Сразу появляется вопрос, зачем площадь задавать через нагрузку? И он справедлив ©

Постараемся найти на него ответ. Для этого, рассмотрим отдельно два варианта формирования лучистого теплообмена.

Вариант 1 (если задавать поток тепла на узел)

Тепловой поток на узел определяется как чистый тепловой поток $\left[\frac{\mathcal{A}^{\mathsf{ж}}}{\mathsf{c}^{\mathsf{·}\mathsf{m}^2}}\right]$, умноженный на площадь, через которую проходит этот поток [м²]. В случае радиации мы принимаем, что чистый тепловой поток =1. Нам нужно только найти площадь поглощения, которая приходит на каждый узел схемы.

Если мы рассмотрим часть расчетной схемы (рис. 20), где размеры каждого КЭ равны 20x20 мм, а толщина = 1 м, то контактная поверхность, которая припадает на 1 узел равна:

$$(0.01 \text{M} + 0.01 \text{M}) * 1 \text{M} = 0.02 \text{ M}^2..$$

Значит, в **Загружении 6**, на каждый контактный узел задаем тепловой поток, который равен $0.02 \text{ m}^2 \cdot 1 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{см}^2} \right] = 0.02 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{c}} \right]$, и получаем схему, которая изображена на Рис. 19, г.

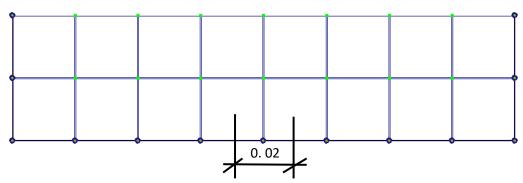


Рис. 20. Определение площади для лучистого теплообмена

Вариант 2 (если задавать поток тепла на ребро пластины)

Как и в предыдущем варианте, тепловой поток на ребро определяется как величина чистого теплового потока $\left[\frac{\mathcal{J}^{\mathsf{ж}}}{\mathsf{c}^{\mathsf{\cdot}\mathsf{M}^2}}\right]$, умноженная, в данном случае, не на площадь, а на толщину пластины H, [м]. На длину этого же ребра нагрузка умножается автоматически при расчёте (аналогично нагрузке на ребро пластины в прочностной задаче).

Чтобы задать нагрузку только на определенные грани конечных элементов, нужно выделить все узлы этих граней, а также выделить сами конечные элементы, которым принадлежат эти грани.

При задании **Нагрузки на пластины** (рис. 21) поставьте галочку для автоматического выбора граней, на которые-задается нагрузка.

Таким образом, для нашей схемы, в **Загружении 6**, на все контактные грани нужно задать тепловой поток, который равен:

$$1 \left[\frac{\mathbf{Д} \mathbf{ж}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{m}^2} \right] \cdot 1 \mathbf{M} = 1 \left[\frac{\mathbf{Д} \mathbf{ж}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{m}} \right].$$

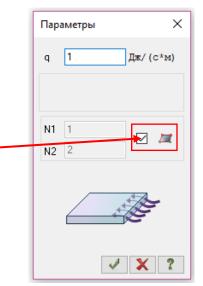


Рис. 21. Выбор загруженных граней

ШАГ 5. ЗАДАНИЕ ПОЖАРА. Формирование динамического загружения

Для задания огневого воздействия используем стандартный график развития пожара, который определяется по формуле:

$$t = 345 * \lg(0.133\tau + 1) + t_e$$

 τ – время нагрева в секундах,

 t_e — начальная температура (предыстория) = 20 °C.

Или можно воспользоваться таблицей 6.1. из СТО

Время, мин.	t, °C	Время, мин.	t, °C	Время, мин.	t, °C
5	576	30	841	80	990
10	679	40	885	90	1000
15	738	50	915	100	1025
20	781	60	945	110	1035
25	810	70	970	120	1049
150	1082	210	1133	270	1170
180	1110	240	1153	300	1186

Нажимаем на кнопку **Формирование динамических загружений из статических**, и задаем изменение конвекции во времени, которая зависит от температуры огня. Формируем динамику из 5го Загружения (конвекции), (Рис.22, а). Задаем там 21 точку из таблицы 6.1, плюс одна точка на момент времени 0сек, значение температуры в котором, делаем таким же как в предыстории – 20 °C. Время задаем в секундах (левая колонка), температуру – в градусах (правая колонка).

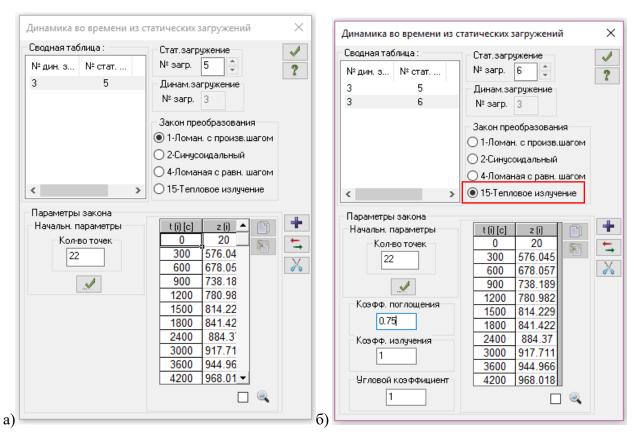


Рис. 22. Формирование динамических загружений з статических

После этого, аналогично формируем радиацию, которая также зависит от температуры огня (Рис.22, б). Только теперь, формируем динамику из **Загружения 6** (радиации), и используем Закон преобразования №15 — **Тепловое излучение**. И задаем коэффициент поглощения = 0.75 (для бетона), излучения = 1 (для огня), и угловой = 1, поскольку считаем, что огонь расположен непосредственно вблизи балки.

И нажимаем на параметр Выполнить расчет динамики во времени:

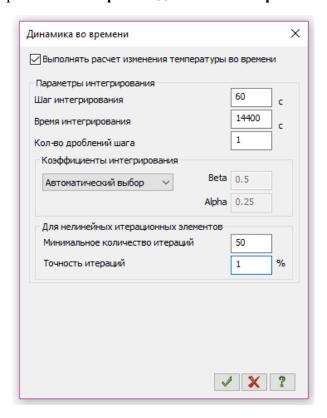


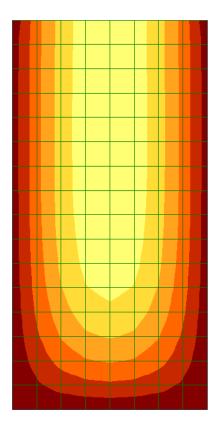
Рис. 23. Параметры динамики во времени



Изменения t° во времени 120 (7.2e+003 сек)

Изополя температур

Единицы измерения - °C



z Ĺ_x

Рис. 24. Температурные изополя

Выше приведен пример температурных полей по сечению 7200 секунде (что равно 120 минутам горения).

В завершение можно добавить, что нет необходимости считать простые сечения вручную, каждое из них пересчитывать в 15 признаке и импортировать в 5й для прочностного расчета. Это можно сделать через вкладку Огнестойкость в Расчетном модуле Железобетон, при задании материалов. После формирования учета огнестойкости, в элементе будет подобрана арматура с учетом предела огнестойкости конструкции.

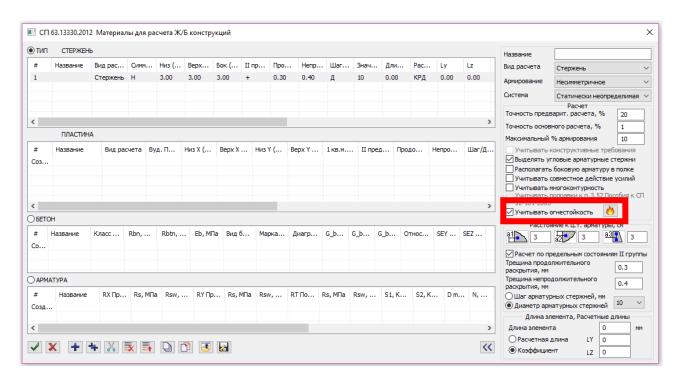


Рис. 25. Материалы для ЖБ расчета

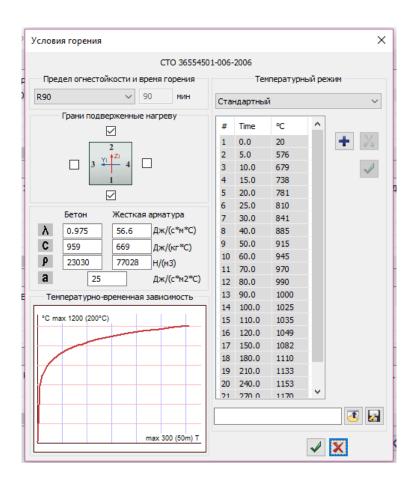


Рис. 26. Условия горения

Но благодаря 15му признаку схему, у пользователя есть возможность рассчитать на огнестойкость сечения или пространственные задачи любой конфигурации и сложности.